La divisione. Aspetti concettuali e didattici

Silvia Sbaragli
N.R.D., Bologna - Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in:
Sbaragli S. (2008). La divisione. Aspetti concettuali e didattici. In: D'Amore B., Sbaragli S. (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Atti del convegno Incontri con la matematica n. 22. 151-154. Bologna: Pitagora.

1. Introduzione

In questo seminario presenteremo alcuni aspetti concettuali e didattici di un oggetto di base della matematica che risulta solo in apparenza di facile acquisizione e gestione durante il processo di insegnamento e apprendimento: la divisione.
Come è riportato in un articolo di questo stesso testo (Bolondi, Fandiño Pinilla, 2008), nell'apprendimento della matematica si possono distinguere varie componenti: algoritmica (es. saper eseguire divisioni composte di atti elementari), strategica (es. risoluzione di problemi), concettuale (noetica), comunicativa (es. argomentazione, validazione, dimostrazione, …), relativa alla gestione di diversi registri semiotici; componenti che possono essere riferite in modo specifico a questo sapere.
Per quanto riguarda l'algoritmo della divisione è idea comune che anche solo il suo "meccanismo"[1] può risultare di ostacolo all'apprendimento. Una testimonianza significativa di questa difficoltà, per esempio, è rintracciabile nel XVII secolo in una pagina dei diari dell'inglese Samuel Pepys, politico, scrittore e uno dei più importanti funzionari statali di quel periodo. Pepys, che per la tenuta dei libri contabili si faceva aiutare dalla moglie, scrive: «Mia moglie è adesso in grado di effettuare senza fatica le addizioni e le sottrazioni e financo le moltiplicazioni. Ma io non oso turbarla ancora con la pratica delle divisioni».
Ricordiamo, inoltre, l'ampia presentazione della divisione riportata ne Larte de Labbacho (Treviso, 1478) il primo libro di matematica stampato al mondo, noto come l'Aritmetica di Treviso, dove la divisione viene così introdotta: «partire e de do numeri propositi : truovare uno terzo numero : el quale se trova tante volte nel mazore : quante unitade sono nel menore».[2] Dunque essa

---

[1] La parola "meccanismo" è tratta da Brousseau (1980).
[2] Ne Larte de Labbacho non compaiono i segni con i quali, modernamente, sono indicate le quattro operazioni aritmetiche (+, -, ×, :). La divisione viene denominata con "*partire*",

è introdotta come l'operazione inversa della moltiplicazione. In questo libro sono inoltre riportati i procedimenti per l'esecuzione pratica della divisione, come la divisione "per battello" che si basa su di un procedimento apparentemente complicato, ma assai diffuso nel Medioevo, direttamente riferibile alla "divisio aurea" eseguita sulle tavolette dell'abaco; soltanto nel XVII secolo essa sarà sostituita definitivamente dal metodo utilizzato ai giorni nostri, denominato inizialmente "divisione per danda". Da questo punto di vista si veda l'articolo di Bagni (1994).

Un importante contributo, per quanto riguarda la divisione, è dato da Brousseau (1980) che sostiene come l'insegnamento degli algoritmi del calcolo sia separato da quello del senso, per cui allievi capaci di eseguire algoritmi hanno difficoltà a identificare situazioni nelle quali vanno applicati; riescono solo gli allievi più capaci in virtù di "misteriosi transfer".

In effetti, per quanto concerne la componente strategica specifica delle situazioni problematiche che coinvolgono la divisione, sono tanti gli aspetti che possono ostacolare la scelta dell'operazione da eseguire.

Da questo punto di vista, ricordiamo i lavori di Fischbein (1985a,b; 1992a; 1998) sui diversi modelli intuitivi delle operazioni.

Per dirla in breve, nel momento in cui lo studente legge il testo di un problema ed intuisce quale tipo di operazione utilizzare, scatta un meccanismo intuitivo (talvolta non corretto) in base al quale sceglie una strategia senza analizzare fino in fondo il proprio comportamento.

Per esempio, avendo accettato il modello intuitivo di divisione tra naturali ed avendolo erroneamente esteso ai razionali, si forma quel modello "parassita" che si può enunciare così: la divisione "diminuisce sempre" (Fischbein, 1998; D'Amore, 1999).

Questa convinzione influenza la scelta dell'operazione da eseguire per risolvere un problema.

Nei seguenti due testi problematici:

«Un litro di succo di frutta costa 5 euro. Quanto costeranno 3 litri di succo di frutta? Come arrivi alla soluzione?»

«Un litro di succo di frutta costa 5 euro. Quanto costeranno 0,75 litri di succo di frutta? Come arrivi alla soluzione?»,

la soluzione intuitiva e corretta per il problema 1 è la moltiplicazione, la soluzione intuitiva ma errata per il problema 2, è la divisione. Il primo istinto è di rispondere al secondo problema con una divisione considerando che la "divisione rende più piccolo".

In Fischbein, Deri, Nello, Marino (1985) si ritiene inoltre che «per la divisione, si possono considerare due modelli primitivi di base: la divisione di

---

ovvero dividere, ed è indicata con "*in*". L'introduzione del simbolo moderno della divisione risale al 1657 grazie a G. Oughtred.

partizione e quella di contenenza (misurazione)»; una distinzione da adulto-insegnante, che risulta didatticamente farraginosa e inutile da proporre in classe.
Nello stesso articolo viene messo in evidenza quanto è frequente la misconcezione basata sulla convinzione che in una divisione A:B, il numero B deve essere minore del numero A. In risposta al problema: «15 amici si dividono 5 chilogrammi di biscotti. Quanti ne spettano a ciascuno?» lo studente, anche delle scuole superiori, è spinto ad eseguire 15:5.
Fischbein (1985b) suggerisce che, per superare l'ostacolo intuitivo creato da un problema, si possa ricorrere «a una classe di problemi collegati ad esso per analogia, ma i cui dati numerici vadano d'accordo con le richieste intuitive». In effetti, l'analogia può aiutare gli alunni a risolvere anche problemi ritenuti apparentemente difficili, evidenziando un conflitto tra la prima soluzione intuitiva e la corretta ed evidente soluzione formale [sul tema dell'analogia si veda Sbaragli et al. (2008)].
Da questo punto di vista abbiamo presentato in tre quinte di scuola primaria tre situazioni analoghe con la stessa struttura e che richiedono tutte la divisione per essere risolte:
«Scrivete quale operazione risolve i problemi; spiegate anche il perché della vostra scelta.
- Una bottiglia di 2 litri di vino costa 6 euro.
  Qual è il prezzo di 1 litro?
- Una bottiglia di 2 litri di acqua costa 1 euro.
  Qual è il prezzo di 1 litro?
- Una bottiglia di 0,75 litri di aranciata costa 2 euro.
  Qual è il prezzo di 1 litro?»

I problemi sono stati proposti nelle tre classi con modalità diverse tenendo conto di ciò che sostiene Fischbein (1985b): «Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva». Le modalità sono state: consegnare i tre testi contemporaneamente con i numeri coperti; consegnare i tre testi contemporaneamente con i numeri visibili; consegnare i tre testi uno alla volta con i numeri visibili.
Con la prima modalità, tutti gli alunni hanno riconosciuto la divisione come procedura risolutiva dei tre problemi senza numeri. I loro commenti confermano che la forma della scrittura dei testi e l'assenza dei numeri li ha aiutati a cogliere l'analogia linguistica e di conseguenza l'analogia procedurale tra le situazioni. La risposta del gruppo di Mattia è significativa: «È una divisione che risolve ogni problema: il costo della bottiglia (cioè dei litri acquistati) diviso il numero dei litri».
Con le altre due modalità, gli alunni non hanno riconosciuto l'analogia linguistica e hanno considerato ogni situazione separatamente, anche quando i

testi sono stati presentati contemporaneamente, non riuscendo così a risolvere il terzo problema: «Ho avuto difficoltà nel terzo problema perché non sapevo quale operazione fare (+, - , ×, :)» (Luigi); «Nel terzo problema l'operazione non è possibile» (Marco).
Nel momento della riflessione con tutta la classe, abbiamo ripresentato i problemi senza numeri per fissare l'attenzione sulla disposizione delle parole in modo da far risaltare l'analogia tra un testo e l'altro.
Un altro aspetto della divisione da non sottovalutare è quello concettuale che è stato trattato in Arrigo, Sbaragli (2008) effettuando una ricerca su un campione di 73 insegnanti di scuola primaria (41 ticinesi e 32 piemontesi) per valutare le loro convinzioni relative all'operazione di divisione e agli insiemi numerici nei quali può essere definita tale operazione. Dai risultati emergono in diversi casi una mancanza di sapere consapevole su questo argomento oltre alla presenza di misconcezioni e modelli intuitivi erronei e incoerenti, che possono condizionare la qualità e persino la correttezza del loro insegnamento.
Le misconcezioni e incoerenze possedute dagli insegnanti per questo sapere derivano spesso, nel caso degli Italiani, dalle proposte dei libri di testo che impiegano numerosi termini, a volte impropri, non accompagnati dalle relative spiegazioni. Auspichiamo che questo lavoro possa essere un primo passo verso il cambiamento, l'ampliamento e la sistemazione delle proposte didattiche fornite dai libri di testo per questi saperi basilari.

Bibliografia

Arrigo G., Sbaragli S. (2008). Le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria relative al concetto di divisione. *La matematica e la sua didattica.* 4, 479-520.

Bagni G.T. (1994). Numeri e operazioni nel Medioevo: Larte de labbacho (l'Aritmetica di Treviso, 1478). *La matematica e la sua didattica.* 4, 364–373.

Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I. (2008). Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. In questo stesso testo. 129-131.

Brousseau G. (1980). Problèmes de l'enseignements des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques.* 1, 1, 11-59.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Fischbein E. (1985a). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (Ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.

Fischbein E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (Ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.

Fischbein E. (1992a). Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 25-38.

Fischbein E. (1998). Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica. *La matematica e la sua didattica*. 4, 365-401.

Fischbein E., Deri M., Nello M.S., Marino M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education.* 16, 3-17.
Sbaragli S., Cottino L., Gualandi C., Nobis G., Ponti A., Ricci M. (2008). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in àmbito geometrico.* Roma: Armando Armando.

Parole chiave: divisione; algoritmo; componente strategica; aspetti concettuali; aspetti didattici.